



Ministerio de
Educación

Gobierno de Chile

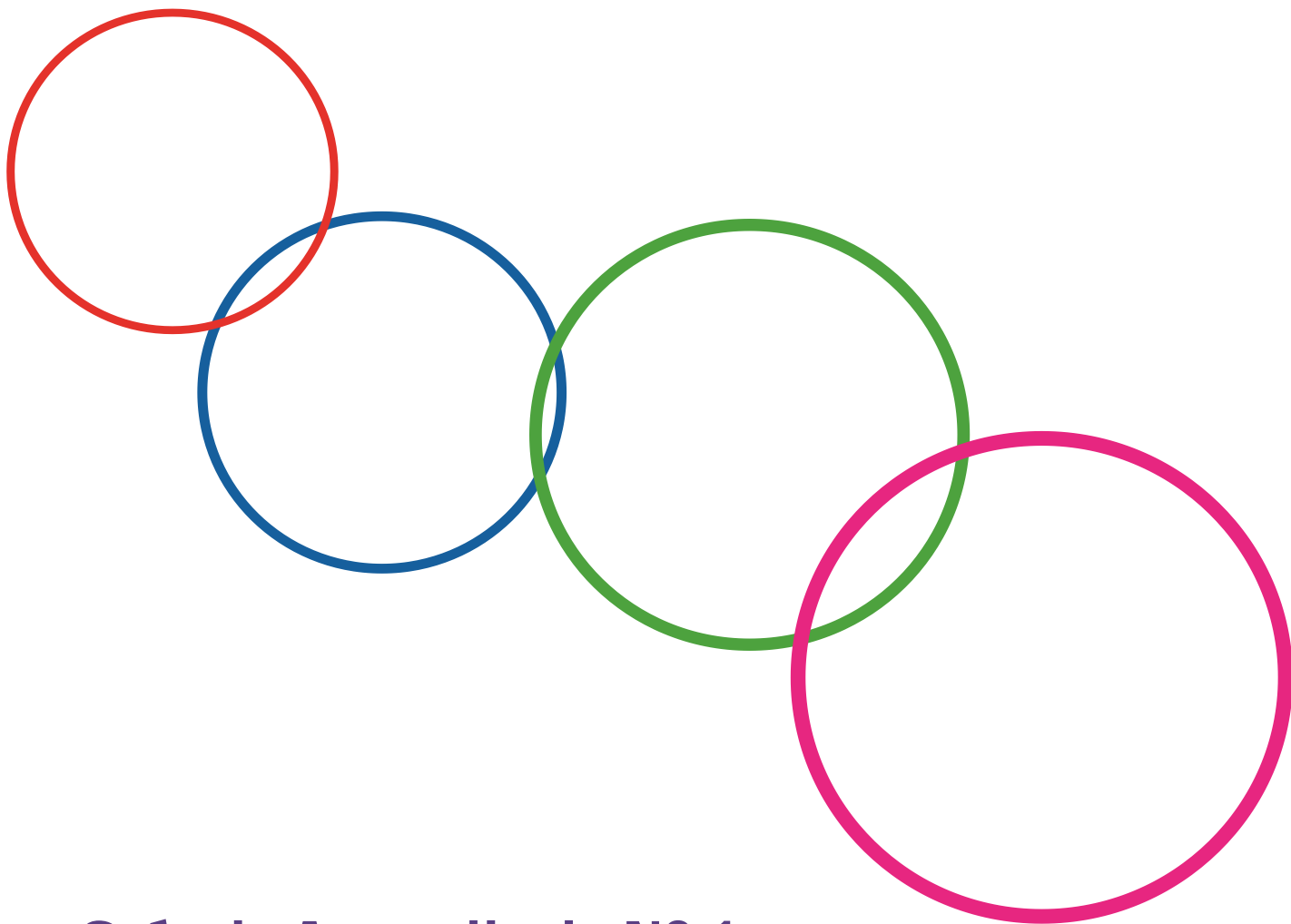
Guía de Aprendizaje N° 2

RAZONES Y PROPORCIONES.

Educación Matemática

Primer nivel o ciclo de Educación Media

Educación para Personas Jóvenes y Adultas



Guía de Aprendizaje N° 1

“USEMOS NÚMEROS Y LETRAS”

Educación Matemática

Primer Nivel o Ciclo de Educación Media

Educación para Personas Jóvenes y Adultas

© Ministerio de Educación
Avda. Bernardo O'Higgins 1371, Santiago de Chile

Guía de Aprendizaje N°1

USEMOS NÚMEROS Y LETRAS

Primer Nivel o Ciclo de Educación Media

Educación para Personas Jóvenes y Adultas

Segunda edición, año 2013

Inscripción N° 212.873

Autores:

Mauricio Huircán Cabrera

Colaboradores:

Nicolás de Rosas Cisterna, Rosita Garrido Labbé, María Angélica Contreras Fernando, Pablo Canales Arenas y Carolina Marambio Cárcamo, Jenny Marisel Contreras Verdejo, Katherina Soledad Carmona Valdes, Walter Roberto Valdivieso Sepúlveda, Manuel Ernesto Urzúa Bouffanais.

Edición:

Jose Luis Moncada Campos

Revisión editorial matemática:

Carla Falcón Simonelli

Coordinación Nacional de Educación de Personas Jóvenes y Adultas

División de Educación General

Reimpresión por A Impresores, año 2019

Iconografía



Información

Indica que aparece información en el contenido.



Atención

Indica que el cuadro posee información clave para comprender el contenido.



Tips

Indica al estudiante información breve respecto de un tema.



Página Web

Indica una página web que complementa el contenido.



Actividad

Indica que el estudiante debe aplicar lo aprendido en ejercicios propuestos.



Actividad en el cuaderno

Indica que el estudiante debe desarrollar el trabajo propuesto en su cuaderno.



Evaluación

Indica una evaluación final de contenidos.



Presentación

“Es muy común que las personas en nuestro país, tengan la percepción de que las matemáticas son “ideas y cosas” muy difíciles de aprender, casi inalcanzables y por lo tanto, al momento de enfrentarse a ellas, sienten temor de no comprenderlas o simplemente de equivocarse al resolver un ejercicio. El material de apoyo que usted tiene en sus manos y que la Coordinación Nacional de Educación para Personas Jóvenes y Adultas del Ministerio de Educación pone a su disposición, ayudará a cambiar esa concepción y los posibles prejuicios que tenga el lector, pues desarrolla conceptos matemáticos necesarios de aprender en este nivel, de manera que van desde lo más simple a lo más complejo. Además, permitirá que usted desarrolle la capacidad de autoaprendizaje, todo lo anterior mediante un ciclo de guías para las modalidades Regular y Flexible de Educación para Personas Jóvenes y Adultas.

El desarrollo de las guías considera la secuencia didáctica: Inicio – Desarrollo – Cierre, tratando de fomentar la rigurosidad y precisión de los conceptos matemáticos. Es importante destacar que el proceso de aprendizaje de la matemática y otras ciencias, es un proceso que pasa por la dedicación y trabajo personal de quien desea aprender.

Esta guía, que trata contenidos que refuerzan y extienden lo ya aprendido en los niveles anteriores, está organizada en 3 guías de aprendizaje: El conjunto numérico de los enteros ($\mathbb{Z}$), los racionales ($\mathbb{Q}$) y los irracionales ($\mathbb{Q}'$ o $\mathbb{I}$). Además, contiene elementos y lenguaje algebraico, algunas convenciones del lenguaje matemático, el uso de los paréntesis y valoración de expresiones algebraicas.

Al final de cada unidad de trabajo se encuentran ejercicios y situaciones que le servirán para evaluar el nivel de logro respecto de los aprendizajes desarrollados. Lo invitamos a trabajar de manera muy dedicada en esta guía y descubrir lo fácil que pueden ser los conceptos matemáticos y hacerlos parte de su vida.

Guía de trabajo N° 1

Los números me sirven...



Contenidos

- **Identificación y uso de números enteros en contextos cotidianos, orden, operatoria, representación en la recta numérica y aplicación a situaciones problemáticas.**
- **Uso de las letras en el lenguaje algebraico, convenciones del lenguaje matemático, uso de paréntesis.**

¿DE DÓNDE VIENEN LOS NÚMEROS?

El ser humano
mañana y
necesidad de
¿Cuántos... Cuántos?
animales, ¿cuántos?

Así como ahora, antiguamente, el ser humano tenía que cubrir ciertas necesidades básicas como comer y abrigarse. Uno de los problemas que enfrentaba era el de saber cuántos animales debía cazar para alimentar a su grupo, o cuántas pieles necesitaba para hacer su ropa. Luego aprendió a cultivar la tierra y criar animales, y surgieron otras necesidades como por ejemplo, si dejaba a los animales salir a pastar, debía contar los que salían para saber si volvía la misma cantidad. Otras preguntas que lo preocupaban eran, **¿cuánto tiempo falta para que venga la época de lluvias o cuánto terreno debo cultivar?**

Para responder a estas preguntas los seres humanos crearon el lenguaje de los números y también distintos métodos para contar. Al comienzo utilizaban piedras, pequeños palitos de madera, nudos de cuerdas, o sus propios dedos. A medida que pasó el tiempo comenzaron a usar símbolos gráficos como señales para contar, como marcas en una vara o simplemente trazos específicos sobre la arena; y muchos años después, otros símbolos llamados números.

Así como los números nacen de la necesidad de contar objetos, su evolución surge como necesidad también de dar respuesta a situaciones diversas; por ejemplo, el cero responde a la necesidad de mostrar que no hay elementos en un conjunto o **¿con qué números puedo representar lo que “me falta” o lo que “debo”?**

vivan los enteros, los naturales y muchos más.

Donde miro aparecen números.

"Actualización de números enteros"

humano, despertó una
se dio cuenta que tenía la
e responder preguntas como:
¿Cuántas...? Y otras como: "Hay 10
antos me faltan para tener 16....?".

$$\begin{aligned}a + 10 &= 16 \\ a &= 16 - 10 \\ a &= 6\end{aligned}$$

Luego de dar respuesta a la pregunta
de **¿Cuántos?** o **¿Cuántas?**: surge para el
ser humano, la idea de los números Naturales.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

¡Pasaron miles de años para la aparición de los
números negativos, y otros más para la idea del
cero!

Avancé desde Coquimbo 20 km. hacia
el norte y ahora debo ir 100 km. hacia el sur.

¿Cuántos kilómetros retrocedí desde Coquimbo?

$$x = 20 - 100$$

$$x = -80$$

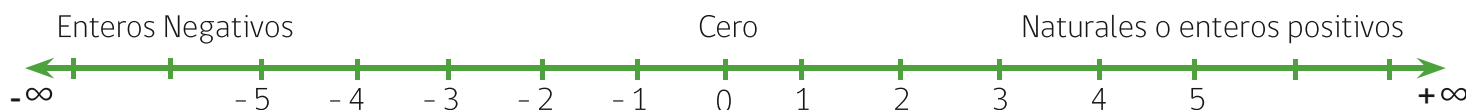
¡Retrocedí 80 km!

LOS NÚMEROS ENTEROS

Recordemos que el conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$) incluye a los números naturales ($\mathbb{N}$), los números negativos y el cero. Para diferenciar los números positivos de los negativos, se escribe un signo “menos” delante del número. Veamos el esquema y la recta numérica:



REPRESENTACIÓN EN LA RECTA NUMÉRICA



OPUESTO DE UN NÚMERO ENTERO

Cada número entero tiene un opuesto en la recta numérica que está al otro lado de 0, exactamente a igual unidades de distancia. Así, el opuesto de 3 es -3 y el opuesto de -5 es 5. Por supuesto que el opuesto de 0 es 0, por lo que es evidente que -0 es igual a 0.

ORDEN EN LOS NÚMEROS ENTEROS

Los números enteros, al igual que los naturales, son un conjunto de números ordenado, es decir, al considerar dos números distintos, es menor el que queda a la izquierda en la recta numérica. Así, por ejemplo:

2 es menor que 5 porque 2 está a la izquierda de 5;

-5 es menor que -2 porque -5 está a la izquierda de -2 .

De otro modo, también se puede decir que es mayor el número que queda a la derecha en la recta numérica, por ejemplo, 0 es mayor que -1 y también, mayor que -4 .

USO DE LOS SÍMBOLOS < (MENOR QUE) Y > (MAYOR QUE).

Para comparar números enteros, se utilizan los símbolos < (menor que) y > (mayor que).



Ejemplos:

2 es menor que 5 se escribe, $2 < 5$;

- 5 es menor que -2 se escribe, $-5 < -2$

0 es mayor que -1 se escribe, $0 > -1$;

$0 > -4$ se lee "0 es mayor que -4 "



TIPS

Para escribir conjuntos en lenguaje matemático, se necesita la siguiente nomenclatura: $\in$: "pertenece a"; $:$ "tal que"; $\wedge$: "y". He aquí algunos ejemplos de conjuntos de números enteros:

- Números menores que 0: $\{x \in \mathbb{Z} / x < 0\}$
- números mayores o iguales que -2: $\{x \in \mathbb{Z} / x \geq -2\}$
- números mayores que -8 y menores o iguales que -4: $\{x \in \mathbb{Z} / x > -8 \wedge x \leq -4\}$ o $\{x \in \mathbb{Z} / -8 < x \leq -4\}$.



Actividad en el cuaderno

- Dibuje una recta numérica graduada de 1 en 1, que incluya los números enteros desde - 12 a 12.
- En la recta dibujada en (a) marque con un círculo negro (●) - 11 y su opuesto; con un cuadrado negro (■) 10 y su opuesto; marque con una cruz (x) los números enteros menores que - 7.
- Escriba el opuesto de - 3; el opuesto 8; el opuesto del opuesto de - 12.
- Dibuje una nueva recta numérica graduada de 1 en 1, que incluya los números enteros desde - 8 a 8.
- Marque con una cruz los números mayores o iguales a - 2; marque con un círculo negro los números mayores que - 8 y menores o iguales que - 4.
- Escriba los números del siguiente conjunto $\{x \in \mathbb{Z} / -6 < x \leq 2\}$

VALOR ABSOLUTO

El **valor absoluto** de un número representa la distancia entre la posición donde está el número y el cero. Se trata de la distancia absoluta, es decir, no importa si esta distancia se mide (desde 0) hacia la derecha o hacia la izquierda. Por eso, el valor absoluto de un número negativo es igual al mismo número pero sin signo. El valor absoluto se denota escribiendo el número entre dos barras verticales paralelas: $||$



Ejemplos:

$$|-5| = 5$$

$$|-17| = 17$$

$$|-134| = 134$$

$$|5| = 5$$

$$|17| = 17$$

$$|134| = 134$$

$$|0| = 0$$



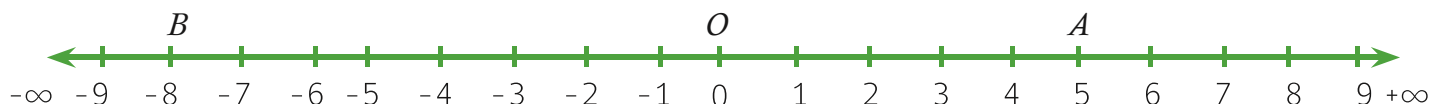
TIPS

- El valor absoluto de un número positivo es el mismo número.
- El valor absoluto de un número negativo es el número sin signo.
- El valor absoluto de 0 es 0



ACTIVIDAD

Dada la recta numérica de la figura:



Determine la longitud del segmento $\overline{OA}$ en unidades de la recta numérica y escríbala como el valor absoluto de un número.

Determine el segmento cuya longitud es $|-8|$

Determine la distancia entre los puntos A y B. Expresé esta distancia como una suma de valores absolutos.

Calcule:

a) $|-2| =$

b) $|-7| =$

c) $|4| =$

d) $|5 - |-8|| =$

**ACTIVIDAD**

Lea atentamente el siguiente texto: "Viajando desde Butalelbún hasta los Ángeles" y luego desarrolle las actividades:



Eran las cuatro de la madrugada, la temperatura oscilaba alrededor de los cinco grados bajo cero. Ponoylew y Coyihuil montaron un caballo, ella al anca, se abrazó fuertemente a su esposo bajo la gruesa manta y emprendieron el recorrido de cuatro kilómetros hacia el paradero del bus. En el camino cruzaron tres brazos del río; luego, en bus, recorrieron aproximadamente sesenta y cinco kilómetros para llegar a la Villa Ralco y desde ahí, ochenta y cuatro kilómetros para Los Ángeles. (velocidad promedio entre Ralco y los Ángeles: 80 km/h).

a) Escriba todos los números que aparecen en esta situación:

b) Si el bus recorre el camino hasta Ralco, a una velocidad promedio de 35 km/h. Complete la tabla con los tiempos que tarda a cada comunidad:

	Pitril	Otue	Cauñicu	Malla Malla	Trapa Trapa	Butalelbun
Distancia desde Ralco a:	12 km	21 km	29 km	35 km	50 km	65 km
Velocidad Bus	$v = 35 \text{ km/h}$	35 km/h	35 km/h	35 km/h	35 km/h	35 km/h
Tiempo Empleado	$t = \frac{d}{v}$ $\frac{12 \text{ km}}{35 \text{ km/h}} = 0,34 \text{ h}$					

c) Del ejercicio anterior, escriba en minutos el tiempo empleado en cada caso.


TIPS

Para transformar horas a minutos, se debe multiplicar por 60.

Por ejemplo,

2 horas equivalen a $2 \times 60 = 120$ minutos;

0,25 horas = $0,25 \times 60 = 15$ minutos;

$\frac{1}{2}$ hora = minutos.

**ACTIVIDAD****Resuelva cada situación propuesta:**

- a) Construya una recta numérica convenientemente graduada, en la que ubique de manera aproximada todas las distancias enunciadas en el ejercicio (b) de la página anterior

- b) A partir de la recta que usted construyó, redacte dos preguntas que se puedan responder con los datos de la situación expuesta

.....

.....

- c) Resuelva las preguntas creadas, justificando cada paso de la solución.

- d) Suponga que el paradero de bus está a la puerta de la casa de Ponoylew y Coyihuil. En este caso determine la distancia recorrida por ellos en bus a la ciudad de los Ángeles y el tiempo total que han demorado; suponga una velocidad promedio del bus $v = 80$ km/h.

**ACTIVIDAD****Resuelva los siguientes ejercicios y aplicaciones:**

1) Determine el número entero que sugiere cada frase y escriba su valor absoluto:

a) Nueve segundos antes del despegue:

b) Quince grados bajo cero:

c) La temperatura subió de menos cuatro grados a dos grados sobre cero:

d) El déficit del balance es de dos millones de pesos:

e) En la venta de libros usados gané once mil pesos:

f) El negocio fue tan malo que no hubo pérdida ni ganancia:

g) Nueve mil pies sobre el nivel del mar:

2) Dibuje una recta numérica y ubique en ella los números de las frases a, b, c y f de la actividad anterior:

3) Escriba un antónimo de la palabra **destacada** y comente con sus compañeros (as) ejemplos de la vida real en donde sean utilizados estos términos junto a un número:

a) Antes y **b) Eleva y**

c) **y antecede** **d)** **y adelantar**

**ACTIVIDAD****Operaciones aritméticas con números enteros:**

Resuelva los siguientes ejercicios numéricos de acuerdo a lo indicado en cada caso:

a) Números enteros positivos: cuando se suman, multiplican o se dividen, el resultado es un número positivo:

$32 + 5 + 8 = \boxed{}$

$25 \cdot 7 = \boxed{}$

$39.537 : 69 = \boxed{}$

b) Números enteros negativos: cuando se suman, el resultado es un número negativo; al multiplicarse o dividirse, el resultado es un número positivo:

$-32 + (-5) = \boxed{}$

$-15 \cdot (-7) = \boxed{}$

$-51.402 : -659 = \boxed{}$

c) Números enteros de distinto signo: Cuando se suman, se restan los valores absolutos y se conserva el signo del número con mayor valor absoluto.

$71 + (-5) = \boxed{}$

$-251 + 169 = \boxed{}$

$-151 + 16 - 319 = \boxed{}$

d) Al multiplicar o dividir dos números de distinto signo el resultado es un número negativo:

$-21 \cdot 4 = \boxed{}$

$-1.701 : 567 = \boxed{}$

$3.723 : -3 = \boxed{}$

OPERACIONES ARITMÉTICAS CON PARÉNTESIS

$$+ (a) = +a$$

$$+ (-a) = -a$$

$$- (+a) = -a$$

$$- (-a) = +a$$

“Si delante del paréntesis hay un signo (+), el signo interior se conserva”: $+ (+3) = + 3 = 3$
 $+ (-2) = -2$

“Si delante del paréntesis hay un signo (-), el signo interior se cambia al signo contrario”:
 $- (+4) = -4$
 $- (-5) = +5$



Ejemplo:

$$15 - (-2) \text{ quitando paréntesis: } 15 + 2 = 17$$

$$15 - (+2) \text{ quitando paréntesis: } 15 - 2 = 13$$

$$15 + (-2) \text{ quitando paréntesis: } 15 - 2 = 13$$

$$15 + (+2) \text{ quitando paréntesis: } 15 + 2 = 17$$



TIPS

1. En la operatoria con signos + o - consecutivos, se puede aplicar la siguiente regla de signos:

- Signos iguales se reemplazan por un +
- Signos diferentes se reemplazan por un -

2. Un paréntesis señala que primero deben hacerse las operaciones que están dentro de él.



ACTIVIDAD

Operatoria de números enteros con paréntesis

a) $(+3) + (+5) =$

b) $(+7) + (-4) =$

c) $(-7 + (+8)) =$

d) $(-5) + (-9) =$

e) $(-4) - (-12) =$

f) $- (-13) + (-6) =$

g) $(5 - 3) + (8 - 2) =$

h) $-(9 - 7) - (5 - 9) =$



Trabajando con números enteros, sus signos y paréntesis:

Es posible resolver los ejercicios que involucran sumas o restas dentro de un paréntesis de un modo equivalente al visto en la página 15 (primera forma).

Paréntesis precedido de signo +

PRIMERA FORMA:

Se resuelve la suma indicada entre paréntesis y luego se desarrolla la operación indicada:

$$\begin{array}{rcl} 4 + (9 - 6 + 3) & = & -16 + (-8 + 2) = \\ 4 + (+6) & = & -16 + (-6) = \\ 4 + 6 & = & -16 - 6 = \\ 10 & & -22 \end{array}$$

SEGUNDA FORMA:

Se eliminan el paréntesis y el signo que lo precede; enseguida se efectúan las operaciones de izquierda a derecha:

$$\begin{array}{rcl} 4 + (9 - 6 + 3) & = & -16 + (-8 + 2) = \\ 4 + 9 - 6 + 3 & = & -16 - 8 + 2 = \\ 10 & & -22 \end{array}$$

Paréntesis precedido de signo -

PRIMERA FORMA:

Se resuelve la suma indicada entre paréntesis y luego se desarrolla la operación indicada:

$$\begin{array}{rcl} -16 - (-6 + 8) & = & 4 - (9 - 6 + 3) = \\ -16 - (2) & = & 4 - (6) = \\ -16 - 2 & = & 4 - 6 = \\ -18 & & -2 \end{array}$$

SEGUNDA FORMA:

Se eliminan el paréntesis y el signo menos que lo precede; se cambian los signos de todos los números que están dentro y luego se efectúan las operaciones de izquierda a derecha:

$$\begin{array}{rcl} -16 - (-6 + 8) & = & 4 - (9 - 6 + 3) = \\ -16 + 6 - 8 & = & 4 - 9 + 6 - 3 = \\ -18 & & -2 \end{array}$$



TIPS

PARA ELIMINAR PARENTESIS

- Si un paréntesis está precedido de signo +, se elimina el paréntesis y se conservan los signos.
- Si un paréntesis está precedido de signo -, se elimina el paréntesis y se cambian los signos dentro del paréntesis. El signo - antes del paréntesis, desaparece.



Actividad en el cuaderno

1) Resuelva los ejercicios aplicando ambas formas:

a) $-16 + (-6 - 8) =$

b) $3 + (25 - 9 + 16)$

c) $1 + (27 - 9) + (19 - 29)$

2) Resuelva los ejercicios usando la forma que más le acomode para trabajar con paréntesis:

a) $5 - (+8 + 6) =$

b) $-(-8) + (-3) ((-3) + 8) =$

c) $3 - (6 \cdot 3) + 12 =$

d) $(-8) - (15) =$

e) $-(8 - 7) + (7 - 8) =$

f) $-14 - (-15 + 19) =$

g) $(5 - 7) + (15 - 16) =$

h) $-(-18) - (+13) - (-8) =$

i) $0 \cdot (-8) + 5 + 0 \cdot 9 =$

j) $18 - (+11) - (-14) =$

k) $(-27 : (-3)) - 3(-1) + -5 \cdot 2 =$

l) $(24 - 16) - (25 - 18) =$

PARÉNTESIS DENTRO DE PARÉNTESIS



Para resolver ejercicios combinados hay, por lo menos, dos formas:

- (i) se puede iniciar el trabajo desde el primer nivel de paréntesis interior (**paréntesis rojo**). Luego operar el segundo nivel de paréntesis (**paréntesis azul**), y así sucesivamente.
- (ii) Se puede ir eliminando los paréntesis desde afuera hacia adentro.



Ejemplo:

Trabajo desde adentro hacia afuera:

$$-8 - \{5 + (-1 - 3)\} =$$

$$-8 - \{5 + (-4)\} =$$

$$-8 - \{5 - 4\} =$$

$$-8 - \{1\} =$$

$$-8 - 1 =$$

$$-9$$

Trabajo desde afuera hacia adentro:

$$-8 - \{5 + (-1 - 3)\} =$$

$$-8 - 5 - (-1 - 3) =$$

$$-8 - 5 + 1 + 3 =$$

$$-9$$

**ACTIVIDAD****Aplique lo aprendido: elija la forma de trabajo que considere más simple**

a) $-9 - \{6 + (-3 - 4)\} =$

b) $3 + \{-1 + 5\} - 3 - \{-1 - 5\} =$

c) $6 - (8 - \{5 - 2\} + 1) =$

d) $\{1 + (0 - 2)\} - \{3 - (-1 - 0)\} =$

e) $1 + \{-1 + [-1 + (1 - 1)]\} =$

f) $1 + \{1 - [-1 - (-1) - 1 + 1 + (-1)]\} =$

g) $10 - \{10 - [-10 - (-10) + 10] - 10 + -100\} =$

h) $-5 - \{5 - [-51 - (-51) + 15] - 15 + -15\} =$

i) $-21 - \{21 - [-21 - (-21 - (-21)) + 21]\} =$

j) $-1 - \{1 - [-1 - (-1) + 1] - 1 + (-1)\} =$